Э. Г. Иванов

Чебоксары, iwashkaEd84@ya.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО КЛИНА

Плоско-напряженный упругий клин, состоящий из двух однородно-изотропных клиновидных областей $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$ и $-\beta \leqslant \theta \leqslant 0$ $(0 \leqslant r < \infty)$ (с модулями упругости при растяжении $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ и коэффициентами Пуассона $\upsilon^{(1)}$ и $\upsilon^{(2)}$ соответственно), находится в равновесии. Вершина составного клина закреплена, вращение в точке с координатами $\theta = 0$, $r = r_0$ $(r_0 > 0)$ отсутствует. На луче $\theta = 0$ заданы условия гладкого контакта.

Рассматривается первая основная задача теории упругости. Граничные условия заданы в виде степенных рядов с бесконечными радиусами сходимости. Решение поставленной задачи ищется в виде степенных рядов

$$\sigma_r^{(j)}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(j)}(\theta) r^n, \quad \sigma_\theta^{(j)}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(j)}(\theta) r^n,$$

$$\tau_{r\theta}^{(j)}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(j)}(\theta) r^n, \quad \mathrm{u}^{(j)}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(j)}(\theta) r^n,$$

$$\mathrm{v}^{(j)}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(j)}(\theta) r^n, \quad j = [1,2], \tag{1}$$

где $A_n^{(j)}(\theta)$, $B_n^{(j)}(\theta)$, $C_n^{(j)}(\theta)$, $D_n^{(j)}(\theta)$, $F_n^{(j)}(\theta)$ — неизвестные функции. Здесь и ниже верхний индекс (j) соответствует области с параметрами $(E^{(j)}, \upsilon^{(j)})$. Подставив (1) в дифференциальные уравнения равновесия ([1], с. 122) и уравнение неразрывности, найдем $A_n^{(j)}(\theta)$, $B_n^{(j)}(\theta)$, $C_n^{(j)}(\theta)$. Далее, использовав закон Гука и связь деформации с компонентами смещения ([2] с. 92–93) , определим $D_n^{(j)}(\theta)$, $F_n^{(j)}(\theta)$. Например:

$$
\begin{aligned}
\sigma_r^{(j)}(r,\theta) = &-a_0^{(j)}\sin(2\theta) - b_0^{(j)}\cos(2\theta) + c_0^{(j)}\theta + d_0^{(j)} + \\
&+ \sum_{n\neq 0}\Bigg(-a_n^{(j)}\sin((n+2)\theta) - b_n^{(j)}\cos((n+2)\theta) - \\
&- c_n^{(j)}\left(\frac{n-2}{n+2}\right)\sin(n\theta) - d_n^{(j)}\left(\frac{n-2}{n+2}\right)\cos(n\theta)\Bigg) r^n.
\end{aligned}
$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $a_n^{(j)}$, $b_n^{(j)}$, $c_n^{(j)}$, $d_n^{(j)}$ используются условие гладкого контакта клиновидных областей и граничные условия. Далее задача сводится к решению системы, состоящей из восьми линейных уравнений и восьми неизвестных. Проводится исследование системы, показывается, что полученные степенные ряды имеют бесконечный радиус сходимости. На последнем этапе рассматриваются конкретные примеры, когда заданные функции являются полиномами или целыми функциями ($e^{\pm r}$, $\sin r$, $\cos r$ и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости.* – Л.: Наука, 1968. – 402 с.

2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. *Теория упругости.* – М.: Наука, 1975. – 576 с.